

Dualité onde-particule - L'interféromètre de Mach-Zehnder

M. Betz, I. de Lima et G. Mussatto

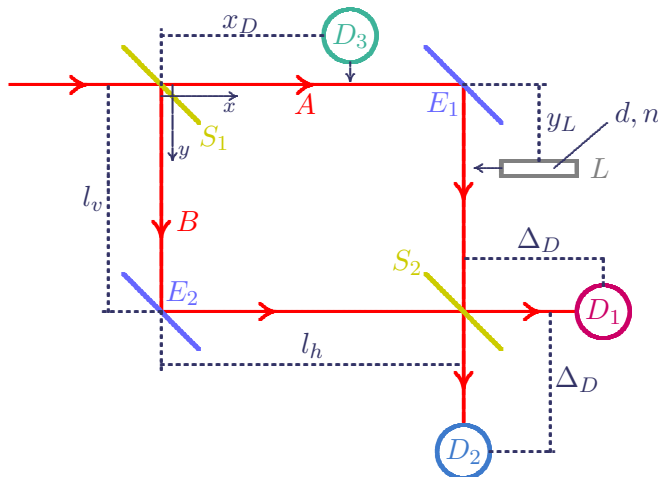
Formalisme

Dans cette partie du matériel, la description mathématique des phénomènes observés avec l'interféromètre est présentée en détail. La théorie sous-jacente, connue sous le nom de mécanique ondulatoire ou mécanique quantique, fait appel à un formalisme plutôt abstrait. Néanmoins, un lecteur ayant une certaine familiarité avec l'algèbre linéaire, les nombres complexes, et les fonctions élémentaires (exponentielle et trigonométriques) devrait être capable de comprendre le développement. Le lecteur qui ne maîtrise pas ces sujets, ou ne souhaite pas plonger dans des considérations assez arides, devrait pouvoir, de toute façon, saisir les aspects conceptuels essentiels, simplement en exécutant les animations et en lisant les courts textes qui les commentent.

I. Spécification du dispositif expérimental

Les conventions indiquées sur la figure ci-dessous seront utilisées pour faire référence aux différentes parties de l'interféromètre. Celui-ci est constitué de deux miroirs semi-réfléchissants S_1 et S_2 et de deux miroirs totalement réfléchissants E_1 et E_2 . À la sortie de l'appareil sont placés deux détecteurs D_1 et D_2 . Accessoirement, un troisième détecteur D_3 et/ou une lame transparente L peuvent être insérés sur un des trajets du faisceau.

Le système de coordonnées a son origine au centre du diviseur de faisceau S_1 , avec l'axe vertical¹ pointant vers le bas.



Les notations suivantes seront aussi employées :

- l_h pour la longueur des bras horizontaux de l'appareil ou, en d'autres mots, pour les distances entre S_1 et E_1 et entre E_2 et S_2 . Ces distances doivent être égales.
- l_v pour la longueur des bras verticaux de l'appareil ou, en d'autres mots, pour les distances entre S_1 et E_2 et entre E_1 et S_2 . Ces distances doivent aussi être égales, mais l_v ne doit pas être nécessairement égale à l_h .
- d pour l'épaisseur de la lame transparente, et n pour l'indice de réfraction du matériau dont elle est faite.
- y_L pour la position verticale de la lame transparente.

1. Les termes "horizontal" et "vertical" sont utilisés ici en référence à la figure. Dans le laboratoire, les quatre bras sont d'habitude dans le même plan horizontal.

- Δ_D pour la distance entre le diviseur de faisceau S_2 et les détecteurs D_1 et D_2 . On supposera que cette distance est la même pour les deux détecteurs.
- x_D pour la distance entre le diviseur de faisceau S_1 et le détecteur D_3 , quand celui-ci est présent.

On supposera que les miroirs semi-réfléchissants sont symétriques et n'absorbent pas la lumière. Dans ce cas, on peut démontrer² que la composante réfléchie de la lumière subit un déphasage de $\pi/2$ ou $\lambda/4$, où λ est la longueur d'onde. Dans le cas d'un miroir totalement réfléchissant, le déphasage dépend du type de miroir. Toutefois, puisque dans l'interféromètre de Mach-Zehnder chaque composante du faisceau est nécessairement soumise à une (et seulement une) telle réflexion, il suffit que les deux miroirs soient de même type pour que le déphasage qu'ils introduisent soit en fait sans importance. Pour simplifier, on supposera que chaque réflexion par un miroir totalement réfléchissant introduit aussi un déphasage égal à $\pi/2$.

II. Flux continu - Ondes planes

A. Spécification et interprétation de l'onde

La propagation dans l'interféromètre d'une onde plane, c'est-à-dire, une onde de fréquence f et longueur d'onde λ bien définies, sera étudiée en premier lieu. En mécanique quantique, une telle onde correspond à un "état stationnaire", un flux ininterrompu de particules qui ne sont pas observées individuellement. Dans la perspective de la théorie ondulatoire classique, cette onde décrit un flux de radiation d'intensité constante.

En mécanique quantique, la fonction d'onde est une fonction complexe. Pour une fréquence bien définie f , elle possède la forme³

$$\Psi(x, y, t) = \psi(x, y) e^{-i\omega t}, \quad (1)$$

où

$$\omega = 2\pi f. \quad (2)$$

Pour une onde plane se propageant dans la direction x , comme c'est le cas avant que le faisceau entre dans l'appareil, on a

$$\psi(x, y) \equiv \psi_0 = e^{ikx}, \quad (3)$$

avec

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (4)$$

La théorie quantique interprète le carré de la norme $|\Psi|^2$ de la fonction d'onde comme une mesure de l'intensité du flux de particules du faisceau. Avec (1) et (3), l'intensité initiale est⁴

$$I_0 = |\psi_0|^2 = 1. \quad (5)$$

2. Voir le matériel annexé intitulé *Informations Complémentaires*.

3. Dans l'interféromètre, la propagation a lieu dans la direction x ou dans la direction y , selon le segment de parcours considéré. Par conséquent, une description bidimensionnelle est requise. La troisième dimension, perpendiculaire au plan de l'appareil, peut être omise.

4. Il s'ensuit que les intensités seront obtenues sous la forme de fractions (ou pourcentages, après multiplication par 100) de l'intensité initiale. Il convient de noter que la description classique, dans laquelle la fonction d'onde est réelle, peut être obtenue en prenant la partie réelle (ou, de façon équivalente, la partie imaginaire) de toutes les expressions présentées ici. Un tel artifice est en fait fréquemment utilisé pour des raisons de convenance. Les intensités déduites seront alors interprétées comme des fractions du flux initial d'énergie (moyenne sur une période).

B. Propagation égale dans les deux bras

Après avoir rencontré le miroir semi-réfléchissant S_1 , l'onde est divisée en deux composantes ψ_A et ψ_B , d'égale intensité ($1/2$). Le module de chaque composante est donc égal à $1/\sqrt{2}$.

La composante ψ_A a été transmise par S_1 , ce qui n'a pas occasionné de déphasage. Par conséquent, entre S_1 et E_1 ,

$$\psi_A(S_1 \rightarrow E_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{ikx} . \quad (6)$$

Cette composante est alors réfléchiée par E_1 , ce qui induit un déphasage de $\pi/2$, en plus évidemment de changer de 90° la direction de propagation. Donc, après cette réflexion

$$\psi_A(E_1 \rightarrow S_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(kl_h + \frac{\pi}{2} + ky)} , \quad (7)$$

où l_h dénote la distance horizontale parcourue par le faisceau sur le chemin A (évidemment égale à la distance entre S_1 et E_1). Quand elle atteint S_2 , l'onde ψ_A est divisée en une composante transmise $\psi_A(D_2)$ qui s'achemine vers le détecteur D_2 , et une composante réfléchiée $\psi_A(D_1)$ qui se dirige vers le détecteur D_1 . Cette composante subit un deuxième déphasage de $\pi/2$ lors de la réflexion. Chacune de ces composantes a un module égal à celui de ψ_A divisé par $\sqrt{2}$, soit $1/2$. On peut donc écrire

$$\psi_A(D_1) = \frac{1}{2} e^{i(kl_h + \frac{\pi}{2} + kl_v + \frac{\pi}{2} + kx')} = \frac{1}{2} e^{i(kl_v + \pi + kx)} , \quad (8)$$

$$\psi_A(D_2) = \frac{1}{2} e^{i(kl_h + \frac{\pi}{2} + kl_v + ky')} = \frac{1}{2} e^{i(kl_h + \frac{\pi}{2} + ky)} , \quad (9)$$

où un système de coordonnées (x', y') dont l'origine coïncide avec S_2 a été utilisé temporairement, et où l_v dénote la distance verticale parcourue par le faisceau sur le chemin A (évidemment égale à la distance entre E_1 et S_2).

La composante ψ_B est réfléchiée par S_1 , ce qui occasionne un déphasage de $\pi/2$, en plus de changer de 90° la direction de propagation. Par conséquent, entre S_1 et E_2 ,

$$\psi_B(S_1 \rightarrow E_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(ky + \frac{\pi}{2})} . \quad (10)$$

Cette composante est ensuite réfléchiée par E_2 , ce qui suscite un autre déphasage de $\pi/2$, et aussi modifie de nouveau de 90° la direction de propagation. Il s'ensuit qu'après cette réflexion

$$\psi_B(E_2 \rightarrow S_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(kl_v + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + kx)} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(kl_v + \pi + kx)} , \quad (11)$$

où a été tenu compte du fait que la distance verticale parcourue par le faisceau sur le chemin B (évidemment égale à la distance entre S_1 et E_2) est aussi égale à l_v . Quand elle atteint S_2 , l'onde ψ_B est divisée en une composante transmise $\psi_B(D_1)$ qui continue vers le détecteur D_1 , et une composante réfléchiée $\psi_B(D_2)$ qui se dirige vers le détecteur D_2 . Cette composante subit un troisième déphasage de $\pi/2$ lors de sa réflexion. Chacune de ces composantes a un module égal à celui de ψ_B divisé par $\sqrt{2}$, donc égal à $1/2$. De la sorte, on a⁵

$$\psi_B(D_1) = \frac{1}{2} e^{i(kl_v + \pi + kl_h + kx')} = \frac{1}{2} e^{i(kl_v + \pi + kx)} , \quad (12)$$

$$\psi_B(D_2) = \frac{1}{2} e^{i(kl_v + \pi + kl_h + \frac{\pi}{2} + ky')} = \frac{1}{2} e^{i(kl_h + \frac{3\pi}{2} + ky)} . \quad (13)$$

5. On utilise ici le fait que la distance entre E_2 et S_2 est l_h .

En combinant (8) et (12), on obtient l'onde résultante qui atteint D_1 :

$$\psi(D_1) = \psi_A(D_1) + \psi_B(D_1) = \frac{1}{2} e^{i(kl_v + \pi + kx)} + \frac{1}{2} e^{i(kl_v + \pi + kx)} = e^{i(kl_v + \pi + kx)}. \quad (14)$$

De la même manière, en combinant (9) et (13), l'onde résultante arrivant à D_2 peut être écrite sous la forme :

$$\begin{aligned} \psi(D_2) = \psi_A(D_2) + \psi_B(D_2) &= \frac{1}{2} e^{i(kl_h + \frac{\pi}{2} + ky)} + \frac{1}{2} e^{i(kl_h + \frac{3\pi}{2} + ky)} \\ &= \frac{1}{2} e^{i(kl_h + \frac{\pi}{2} + ky)} (1 + e^{i\pi}) = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

où la formule bien connue $e^{i\pi} = -1$ a été utilisée. Ainsi, il apparaît que l'onde atteignant D_1 possède une amplitude (et donc aussi une intensité) égale à celle de l'onde incidente, alors que rien n'est enregistré par D_2 . En fait, ce résultat est très facile à comprendre. Les ondes qui arrivent à D_1 en suivant les chemins A et B subissent toutes deux une réflexion par un miroir semi-réfléchissant. Par conséquent, elles sont en concordance de phase quand elles arrivent et elles interfèrent constructivement. Quant aux ondes qui atteignent D_2 , celle qui prend le chemin A n'est soumise à aucune réflexion par un miroir semi-réfléchissant. En contraste, celle qui suit le chemin B est réfléchié successivement par chacun des deux miroirs semi-réfléchissants et, par conséquent, est déphasée d'une demi longueur d'onde et est en opposition de phase par rapport à la première. L'interférence est complètement destructive. Comme cela a déjà été indiqué, les miroirs totalement réfléchissants peuvent être ignorés dans cet argument.

C. lame transparente dans un des bras

Considérons maintenant ce qu'il se passe quand une lame transparente L d'épaisseur d , faite d'un matériau d'indice de réfraction n , est insérée sur le chemin A , par exemple entre E_1 et S_2 .

Il est bien connu que dans un milieu matériel d'indice de réfraction n , la vitesse de la lumière est c/n , si c est la vitesse de la lumière dans le vide.⁶ Par conséquent, étant donné que la fréquence de l'onde n'est pas affectée par le matériau, celui-ci induit une modification de la longueur d'onde λ , dont résulte une valeur λ' donnée par

$$\lambda' = \frac{c}{nf} = \frac{\lambda}{n}. \quad (16)$$

De manière concomitante, le nombre d'onde k devient

$$k' = \frac{2\pi}{\lambda'} = nk. \quad (17)$$

Il s'ensuit que la présence du matériau occasionne un déphasage de la composante ψ_A , donné par

$$\phi = (k' - k)d = (n - 1)kd. \quad (18)$$

Puisqu'un déphasage de 2π correspond à une longueur d'onde, le résultat ci-dessus peut être interprété comme un déplacement spatial des fronts d'onde égal à

$$\varphi = (n - 1)d. \quad (19)$$

Ainsi, suite à l'introduction de la lame, l'expression (7) est modifiée de la manière suivante :

$$\psi_A(E_1 \rightarrow S_2) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(kl_h + \frac{\pi}{2} + ky)} & \text{pour } y < y_L \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(kl_h + \frac{\pi}{2} + \phi + ky)} & \text{pour } y > y_L, \end{cases} \quad (20)$$

6. La vitesse de la lumière dans l'air est pratiquement égale à c .

où y_L est la position verticale de la lame. Les modifications correspondantes des expressions (8) et (9) sont

$$\psi_A(D_1) = \frac{1}{2} e^{i(kl_v + \pi + \phi + kx)}, \quad (21)$$

$$\psi_A(D_2) = \frac{1}{2} e^{i(kl_h + \frac{\pi}{2} + \phi + ky)}. \quad (22)$$

Par conséquent, les modifications des expressions (14) et (15) sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \psi(D_1) = \psi_A(D_1) + \psi_B(D_1) &= \frac{1}{2} e^{i(kl_v + \pi + \phi + kx)} + \frac{1}{2} e^{i(kl_v + \pi + kx)} \\ &= e^{i(kl_v + \pi + \frac{\phi}{2} + kx)} \cos \frac{\phi}{2}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \psi(D_2) = \psi_A(D_2) + \psi_B(D_2) &= \frac{1}{2} e^{i(kl_h + \frac{\pi}{2} + \phi + ky)} + \frac{1}{2} e^{i(kl_h + \frac{3\pi}{2} + ky)} \\ &= e^{i(kl_h + \frac{\pi}{2} + \frac{\phi}{2} + ky)} i \sin \frac{\phi}{2}. \end{aligned} \quad (24)$$

En conclusion, pour une intensité du faisceau incident égale à l'unité, les intensités mesurées par les deux détecteurs sont

$$I(D_1) = \cos^2 \frac{\phi}{2}, \quad (25)$$

$$I(D_2) = \sin^2 \frac{\phi}{2}. \quad (26)$$

En modifiant l'épaisseur d de la lame et/ou l'indice de réfraction n du matériau qui la constitue, il est possible de modifier à volonté ces intensités relatives. Dans la visualisation, l'épaisseur de la lame peut être ajustée entre 0 et 2λ , et l'indice de réfraction entre 1 et 2. Ces intervalles sont suffisants pour qu'il soit possible d'obtenir n'importe quels pourcentages donnés pour les intensités relatives mesurées.

III. États monophotoniques - Paquets d'onde

A. Paquet d'onde d'un photon

Comme cela est bien connu, quoiqu'elle soit formulée comme une théorie ondulatoire, la mécanique quantique doit être interprétée en termes de corpuscules, puisque les événements individuels qui sont observés - cliques dans des détecteurs ou impacts sur un écran - sont localisés dans l'espace et dans le temps. La relation entre le formalisme ondulatoire et les faits expérimentaux est statistique. Spécifiquement, dans le cas de l'interféromètre, les corpuscules sont des photons. Il est possible d'arranger l'appareil de manière à observer les impacts sur un écran. L'aspect ondulatoire se manifeste dans la figure d'interférence formée par l'accumulation d'un grand nombre d'impacts. Une autre procédure, qui sera considérée ici, consiste simplement à utiliser des compteurs de photons comme détecteurs. Comme on le verra ci-dessous, l'aspect ondulatoire se manifeste alors dans les nombres de photons comptés.

Pour analyser en détails la propagation et la détection de photons, il est nécessaire de décrire mathématiquement l'état d'un unique photon. Pour cela, un *paquet d'onde*⁷ doit être construit, c'est-à-dire, une superposition d'ondes planes, avec des valeurs différentes du nombre d'onde k . Les

7. L'association d'un paquet d'onde à un photon n'est pas exempte de limitations. Voir le matériel intitulé *Informations Complémentaires* pour les détails et références.

mathématiques démontrent que si l'on souhaite former un paquet d'onde localisé dans une région de taille Δx , il faut superposer des ondes planes dont les nombres d'onde diffèrent au moins par des quantités d'ordre ⁸ Δk , tel que

$$\Delta k \simeq \frac{1}{\Delta x} . \quad (27)$$

La mécanique quantique stipule des relations entre les quantités physiques associées à l'onde et celles associées à la particule. En particulier, elle postule la relation suivante entre l'impulsion p de la particule et la longueur d'onde λ :

$$p = \frac{h}{\lambda} , \quad (28)$$

où h est la fameuse *constante de Planck*, une nouvelle constante fondamentale qui est omniprésente en physique quantique. En utilisant (4), cette relation peut être réécrite sous la forme

$$p = \hbar k , \quad (29)$$

avec $\hbar = h/2\pi$. De la sorte, la condition mathématique (27) mène à la condition physique

$$\Delta p \Delta x \simeq \hbar , \quad (30)$$

où Δp est la dispersion ou indétermination dans la valeur de l'impulsion. Il convient de souligner que ce sont les valeurs minimales des dispersions qui sont concernées ici. Cette condition est connue comme *la relation d'indétermination (ou d'incertitude) de Heisenberg*.

Pour que le paquet d'onde décrive un photon d'impulsion approximativement définie, il faut que

$$\Delta p \ll \bar{p} \text{ ou } \Delta k \ll \bar{k} , \quad (31)$$

où \bar{p} est l'impulsion moyenne et \bar{k} le nombre d'onde moyen. De la relation (4), il est facile de déduire

$$\frac{\Delta \lambda}{\bar{\lambda}} = \frac{\Delta k}{\bar{k}} , \quad (32)$$

où $\bar{\lambda}$ est la longueur d'onde moyenne. De (27) et (31), il s'ensuit que

$$\Delta x \gg \frac{1}{\bar{k}} , \quad (33)$$

ou, de manière équivalente, en utilisant de nouveau (4),

$$\Delta x \gg \bar{\lambda} . \quad (34)$$

En substance, la taille du paquet d'onde doit être beaucoup plus grande que la longueur d'onde moyenne.

La conclusion à laquelle on vient d'arriver a certaines implications pour la visualisation, sur l'écran, d'un état monophotonique. Si l'on associe au photon un paquet visible mais pas très étendu, la longueur d'onde est nécessairement trop petite pour pouvoir être distinguée sur l'écran. Si, comme cela a été fait ci-dessus, on introduit sur le chemin du faisceau une lame dont l'épaisseur maximale est égale à deux longueurs d'onde, il devient aussi impossible de discerner cette épaisseur à l'échelle de l'écran. Pour cette raison, dans l'animation, une loupe est fournie à l'utilisateur quand il faut manipuler la lame pour définir son épaisseur.

8. Les inégalités dénotées par le symbole \simeq , ainsi que celles dénotées par \ll et \gg , expriment des relations entre ordres de grandeur. Les facteurs "d'ordre un", tels que 2 ou π , sont ignorés.

Avec la supposition (31), le déphasage introduit par la lame est approximativement le même pour toutes les ondes qui composent le paquet et est donné, en fonction du nombre d'onde moyen, par une expression analogue à (18) :

$$\phi = (n - 1) \bar{k} d . \quad (35)$$

Le déplacement spatial de tous les fronts d'onde, et donc du paquet lui-même, est donné par (19). Puisqu'il est du même ordre de grandeur que l'épaisseur de la lame, il est également imperceptible sur l'écran.

Pour décrire la propagation du photon dans le plan de l'interféromètre, il est nécessaire de construire un paquet bidimensionnel, dont la forme générale est

$$\Psi(x, y, t) = \int \frac{dk_1 dk_2}{2\pi} g(k_1, k_2) e^{i[k_1 x + k_2 y - \omega(k_1, k_2)t]} , \quad (36)$$

où

$$\omega(k_1, k_2) = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} c . \quad (37)$$

La relation (37) garantit que le paquet se propage à la vitesse c . Le mouvement prétendu pour le photon détermine les caractéristiques de la fonction $g(k_1, k_2)$. Par exemple, pour que le paquet décrive un photon se propageant dans la direction de l'axe des x avec une impulsion moyenne $\bar{p} = \hbar \bar{k}$, $g(k_1, k_2)$ doit être une fonction centrée en $k_1 = \bar{k}$ et $k_2 = 0$, avec des dispersions $\Delta k_1 \ll \bar{k}$ et $\Delta k_2 \ll \bar{k}$. En écrivant $k_1 = \bar{k} + k'_1$, on peut alors approximer (37) par

$$\omega(k_1, k_2) = \sqrt{(\bar{k} + k'_1)^2 + k_2^2} c \simeq \bar{k} \sqrt{1 + 2 \frac{k'_1}{\bar{k}}} c \simeq \bar{k} \left(1 + \frac{k'_1}{\bar{k}}\right) c = (\bar{k} + k'_1) c , \quad (38)$$

où les termes de second ordre en $\Delta k_1 / \bar{k}$ et $\Delta k_2 / \bar{k}$ ont été négligés. De la sorte, l'expression (36) prend la forme

$$\Psi(x, y, t) = e^{i\bar{k}(x-ct)} \int \frac{dk'_1 dk_2}{2\pi} \bar{g}(k'_1, k_2) e^{i[(k'_1(x-ct) + k_2 y)]} = e^{i\bar{k}(x-ct)} \Phi(x - ct, y) , \quad (39)$$

où les notations

$$\bar{g}(k'_1, k_2) = g(\bar{k} + k'_1, k_2) \quad (40)$$

et

$$\Phi(x, y) = \int \frac{dk'_1 dk_2}{2\pi} \bar{g}(k'_1, k_2) e^{i(k'_1 x + k_2 y)} \quad (41)$$

ont été introduites. Puisque la fonction $\bar{g}(k'_1, k_2)$ est centrée en $k'_1 = k_2 = 0$, la fonction Φ est centrée en $x = y = 0$. Pour permettre l'interprétation probabiliste de la théorie, cette dernière fonction doit être normalisée :

$$\int |\Phi(x, y)|^2 dx dy = 1 . \quad (42)$$

La fonction d'onde (39) correspond à un paquet dont le centre se propage à la vitesse positive c dans la direction x sur la ligne $y = 0$, passant par le point $x = 0$ à l'instant $t = 0$. Dans le but de simplifier les développements futurs, la notation compacte⁹

$$|ct, 0\rangle \equiv e^{i\bar{k}(x-ct)} \Phi(x - ct, y) \quad (43)$$

9. Cette notation s'inspire de celle introduite par P. A. M. Dirac pour systématiser le formalisme de la mécanique quantique. Toutefois, elle est employée ici de façon informelle seulement.

sera utilisée pour ce paquet. Il est aisé de généraliser ceci au cas d'un paquet dont le centre se propage à la vitesse positive c le long de la ligne $y = y_0$ et passe par le point $x = x_0$ en $t = 0$:

$$|ct + x_0, y_0\rangle \equiv e^{i\bar{k}(x-x_0-ct)}\Phi(x - x_0 - ct, y - y_0) . \quad (44)$$

De manière analogue, un paquet dont le centre se propage à la vitesse positive c dans la direction y sur la ligne $x = x_0$ et passe par $y = y_0$ en $t = 0$ peut être écrit

$$|x_0, ct + y_0\rangle \equiv e^{i\bar{k}(y-y_0-ct)}\Phi(x - x_0, y - y_0 - ct) . \quad (45)$$

B. Inclusion des détecteurs

Pour pouvoir discuter la mesure en mécanique quantique, il est nécessaire d'inclure les détecteurs, qui sont des compteurs de photons, dans la description. Si χ_1 et χ_2 dénotent les états des compteurs D_1 and D_2 , on peut supposer que ceux-ci sont dans l'état $\chi(0)$ avant qu'un photon n'arrive et que le passage du photon dans le compteur induit la transition $\chi(0) \rightarrow \chi(1)$ dans l'état de celui-ci. On supposera qu'après avoir enregistré cet évènement et augmenté d'une unité le nombre de photons qu'il indique, un compteur retourne à l'état $\chi(0)$, en attente du photon suivant.

C. Propagation du paquet d'onde dans l'appareil

En utilisant des arguments identiques à ceux développés pour une onde plane, on peut maintenant écrire l'expression de la fonction d'onde associée au photon et aux compteurs dans les différentes parties de l'interféromètre. Pour plus de clarté dans la chronologie des réflexions par les miroirs, on supposera que $l_h > l_v$. Par convenance, la relation

$$e^{i\pi/2} = i , \quad (46)$$

sera invoquée pour écrire la phase additionnelle introduite par chaque réflexion. Puisque le système de deux détecteurs reste dans l'état $\chi_1(0)\chi_2(0)$ jusqu'à la dernière étape du processus (le comptage du photon), il sera omis pour plus de simplicité dans la description des étapes antérieures à la dernière.

On supposera que le paquet d'onde atteint le diviseur de faisceau S_1 en $t = 0$. Avant cela, l'état du photon est

$$\Psi = |ct, 0\rangle \text{ pour } t < 0 . \quad (47)$$

Après être passé par le diviseur S_1 , et avant d'atteindre le miroir E_2 , le photon est dans l'état quantique

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} |ct, 0\rangle + i\frac{1}{\sqrt{2}} |0, ct\rangle \text{ pour } 0 < ct < l_v . \quad (48)$$

Après la réflexion par le miroir E_2 , mais avant la réflexion par le miroir E_1 , l'état est (en utilisant $i^2 = -1$)

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} |ct, 0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |ct - l_v, l_v\rangle \text{ pour } l_v < ct < l_h . \quad (49)$$

Après la réflexion par le miroir E_1 , mais avant d'arriver à la lame L , l'état est

$$\Psi = i\frac{1}{\sqrt{2}} |l_h, ct - l_h\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |ct - l_v, l_v\rangle \text{ pour } l_h < ct < l_h + y_L . \quad (50)$$

Dans le cadre des suppositions explicitées ci-dessus, la lame L introduit simplement un déphasage ϕ de la composante qui la traverse. Par conséquent, après le passage de cette composante à travers la lame, l'état est

$$\Psi = i\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} |l_h, ct - l_h\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |ct - l_v, l_v\rangle \text{ pour } l_h + y_L < ct < l_h + l_v . \quad (51)$$

Puisque les étapes suivantes concernent la détection du photon, les détecteurs seront inclus dans la description de l'état du système à partir d'ici. Après avoir traversé le diviseur de faisceau S_2 mais avant la détection, l'état du système total est

$$\begin{aligned}\Psi_{tot} = & \left\{ i \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} |l_h, ct - l_h\rangle + i \frac{1}{\sqrt{2}} |ct - l_v, l_v\rangle \right] \right. \\ & \left. - \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} |ct - l_v, l_v\rangle + i \frac{1}{\sqrt{2}} |l_h, ct - l_h\rangle \right] \right\} \\ & \times \chi_1(0)\chi_2(0) \text{ pour } l_h + l_v < ct < l_h + l_v + \Delta_D, \end{aligned} \quad (52)$$

où Δ_D dénote la distance entre le diviseur S_2 et les détecteurs, qui sera supposée la même pour les deux détecteurs. En réarrangeant les termes, l'expression (52) peut être simplifiée comme :

$$\begin{aligned}\Psi_{tot} = & -e^{i\phi/2} \left[\text{sen} \frac{\phi}{2} |l_h, ct - l_h\rangle + \cos \frac{\phi}{2} |ct - l_v, l_v\rangle \right] \\ & \times \chi_1(0)\chi_2(0) \text{ pour } l_h + l_v < ct < l_h + l_v + \Delta_D. \end{aligned} \quad (53)$$

L'interaction du photon avec les détecteurs, qui a lieu à l'instant $t = (l_h + l_v + \Delta_D)/c$, transforme cet état en

$$\Psi_{tot} = -e^{i\phi/2} \left[\text{sen} \frac{\phi}{2} |l_h, ct - l_h\rangle \times \chi_1(0)\chi_2(1) + \cos \frac{\phi}{2} |ct - l_v, l_v\rangle \times \chi_1(1)\chi_2(0) \right]. \quad (54)$$

D. Interprétation de la mesure et réduction du paquet d'onde

Jusqu'ici, l'évolution de l'état du système, compteurs y compris, s'est déroulée sans intervention d'un observateur, qui serait témoin du clique d'un des détecteurs, ou d'un ordinateur qui enregistrerait l'incrément d'une unité du nombre de photons déjà accumulés par un des compteurs. Une intervention de cette sorte est nécessaire pour qu'il soit possible de parler du résultat de l'expérience. Si le compteur D_1 enregistre un nouveau photon, son état se change en $\chi_1(1)$. Selon l'interprétation usuelle de la mécanique quantique, la probabilité pour que cela arrive est donnée par le carré de la norme du coefficient du terme correspondant (le deuxième) dans l'expression (54) ci-dessus, c'est-à-dire,

$$P(D_1) = \left| -e^{i\phi/2} \cos \frac{\phi}{2} \right|^2 = \cos^2 \frac{\phi}{2}. \quad (55)$$

De la même manière, si le compteur D_2 enregistre le photon, il se retrouve dans l'état $\chi_2(1)$. La probabilité associée est déduite du coefficient du premier terme de l'état complet (54) :

$$P(D_2) = \left| -e^{i\phi/2} \text{sen} \frac{\phi}{2} \right|^2 = \text{sen}^2 \frac{\phi}{2}. \quad (56)$$

Comme on peut le vérifier immédiatement, les expressions (55) et (56) des probabilités sont identiques aux expressions (25)-(26) des intensités relatives dans la théorie classique. Le calcul théorique de ces probabilités est ce que le formalisme de la mécanique quantique permet. Il n'est pas possible de prévoir le résultat d'une mesure individuelle. Pour vérifier la théorie expérimentalement, il est nécessaire de répéter la mesure de nombreuses fois. Si un grand nombre de photons sont envoyés dans l'appareil et les compteurs D_1 et D_2 enregistrent, respectivement, N_1 et N_2 photons, alors les fractions $N_1/(N_1 + N_2)$ et $N_2/(N_1 + N_2)$ devraient être très proches des valeurs théoriques des probabilités $P(D_1)$ et $P(D_2)$.

Après la détection par le compteur D_1 , l'état du photon sera donné par la partie du second terme de l'expression (54) qui a trait au photon, c'est-à-dire, par le paquet d'onde

$$\Psi_1 = |ct - l_v, l_v\rangle \text{ pour } ct > l_h + l_v + \Delta_D. \quad (57)$$

D'un autre côté, si c'est le compteur D_2 qui a enregistré le passage du photon, l'état subséquent de ce dernier sera facilement extrait du premier terme de (54) :

$$\Psi_2 = |l_h, ct - l_h\rangle \text{ pour } ct > l_h + l_v + \Delta_D . \quad (58)$$

Il convient de remarquer que les coefficients (fonctions du déphasage ϕ) présents dans (54) ont été omis dans (57) et (58). La raison en est que ces états doivent être *normalisés*, c'est-à-dire que la probabilité totale qui leur est associée doit être égale à l'unité. Si le compteur D_1 a été actionné, le photon a nécessairement dû être observé sortant de celui-ci (ou étant absorbé par celui-ci) ; idem pour le compteur D_2 . Les phases globales des états sont sans importance et ont été choisies égales à 1 dans (57) et (58). La réduction de l'état du photon décrit par (54), à l'état (57) ou à l'état (58), dépend du résultat de la mesure ; c'est la fameuse (ou infâme ?) *réduction du paquet d'onde*. Bien que cette réduction soit rendue explicite dans les visualisations, il faut admettre que sa conceptualisation est fort problématique. Faut-il y voir un phénomène physique réel, ou seulement un pas dans un argument logique ? Cette question sera discutée plus avant dans la prochaine section.

E. Quel chemin le photon a-t-il pris ?

Le développement ci-dessus a été basé sur la superposition linéaire de composantes du paquet d'onde qui décrivent la marche du photon au long des deux chemins alternatifs A et B . On peut se demander ce qu'il arrive si l'on essaie de découvrir lequel des deux chemins un photon donné a réellement pris. Pour répondre à cette question, un détecteur D_3 peut être introduit sur le chemin A , à l'endroit indiqué sur la figure. On supposera que $x_D < l_h$, mais le lecteur comprendra aisément que les conclusions tirées ne dépendent pas de la position de D_3 , pour autant qu'il soit quelque part sur le chemin A . On supposera que ce détecteur est initialement dans l'état $\chi_3(0)$ et passe à l'état $\chi_3(1)$ quand il enregistre le passage du photon.

Jusqu'à ce que le paquet d'onde atteigne le détecteur D_3 , il ne se passe rien de nouveau et on peut utiliser (48) pour décrire l'état du photon, en insérant simplement aussi l'état du détecteur :¹⁰

$$\Psi = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} |ct, 0\rangle + i \frac{1}{\sqrt{2}} |0, ct\rangle \right] \times \chi_3(0) \text{ pour } 0 < ct < x_D . \quad (59)$$

Seulement le premier terme de cette expression correspond à la propagation du paquet suivant le chemin A , c'est donc dans ce terme seulement qu'une modification de l'état du détecteur D_3 a lieu. Explicitement, en $t = x_D/c$, l'état ci-dessus devient

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} |ct, 0\rangle \times \chi_3(1) + i \frac{1}{\sqrt{2}} |0, ct\rangle \times \chi_3(0) . \quad (60)$$

Selon l'interprétation déjà introduite ci-dessus de ce qu'il se passe quand un compteur établi de fait si un photon est présent ou pas, on peut déduire de l'expression (60) que la probabilité d'un cliquer du détecteur D_3 est $1/2$ et que, si ce cliquer a lieu, l'état du photon devient

$$\Psi_A = |ct, 0\rangle . \quad (61)$$

La probabilité pour que le détecteur *ne clique pas* est aussi $1/2$ et, dans ce cas, l'état du photon est "réduit" à¹¹

$$\Psi_B = i |0, ct\rangle , \quad (62)$$

qui correspond à un paquet d'onde se propageant exclusivement sur le chemin B .

10. Il n'est pas nécessaire de considérer les détecteurs D_1 et D_2 à ce stade de l'argument.

11. Le facteur i dans (62) n'introduit qu'une phase globale qui est inobservable et peut être omise.

À partir de ce moment, puisque le photon est dans l'état (61) ou dans l'état (62), mais pas dans une superposition de ces deux états, il convient de suivre séparément les évolutions de chacun de ces états dans le reste de l'appareil. Les résultats pour $(l_h + l_v)/c < t < (l_h + l_v + \Delta_D)/c$, c'est-à-dire avant la détection par D_1 ou D_2 peuvent être aisément extraits de l'expression (52) :¹²

$$\Psi_A = i e^{i\phi} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} |l_h, ct - l_h\rangle + i \frac{1}{\sqrt{2}} |ct - l_v, l_v\rangle \right] \times \chi_1(0) \chi_2(0), \quad (63)$$

$$\Psi_B = - \left[\frac{1}{\sqrt{2}} |ct - l_v, l_v\rangle + i \frac{1}{\sqrt{2}} |l_h, ct - l_h\rangle \right] \times \chi_1(0) \chi_2(0). \quad (64)$$

En $t = (l_h + l_v + \Delta_D)/c$, les détecteurs sont atteints et ces états se transforment en

$$\Psi_A = i e^{i\phi} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} |l_h, ct - l_h\rangle \times \chi_1(0) \chi_2(1) + i \frac{1}{\sqrt{2}} |ct - l_v, l_v\rangle \times \chi_1(1) \chi_2(0) \right], \quad (65)$$

$$\Psi_B = - \left[\frac{1}{\sqrt{2}} |ct - l_v, l_v\rangle \times \chi_1(1) \chi_2(0) + i \frac{1}{\sqrt{2}} |l_h, ct - l_h\rangle \times \chi_1(0) \chi_2(1) \right]. \quad (66)$$

On peut constater que la lame transparente introduite sur le chemin A modifie seulement la phase globale du paquet d'onde, ce qui n'implique aucun effet observable. Dans les deux cas - chemin A ou chemin B - la probabilité d'un cliqué est $1/2$ pour D_1 comme pour D_2 . En fait, la découverte du chemin suivi par le photon a détruit l'interférence entre les deux chemins. Comme précédemment, si D_1 cliqué, l'état du photon après le comptage sera décrit par (57) ; dans le cas où c'est D_2 qui cliqué, l'état sera donné par (58).

Il est intéressant de contraster les effets, sur l'état du photon, des deux dispositifs qui ont été introduits dans un des bras de l'interféromètre : la lame transparente et le détecteur. La lame introduit un déphasage dans la composante du paquet d'onde qui la traverse, sans affecter la cohérence entre les deux composantes. En contraste, le détecteur "balaye" une des composantes. Pourquoi une telle différence ? Parce que la lame est seulement un élément additionnel ajouté au système, et non un dispositif destiné à fournir une information sur ce dernier. Par contre, le détecteur enregistre une nouvelle information. La modification de l'état du système - la réduction - correspond à l'incorporation dans la description de la nouvelle information en question. Il est particulièrement remarquable que, même si rien n'arrive au détecteur (pas de cliqué ni d'incrément de la valeur comptabilisée), le simple fait que le détecteur soit présent permet de conclure que le photon n'est pas passé par là et, par conséquent, a suivi le chemin B , ce qui provoque la réduction du paquet d'onde dans ce bras.¹³ En d'autres termes, le fait qu'un événement possible n'ait pas eu lieu quelque part affecte l'état du système ailleurs. Toutefois, il convient évidemment de résister à la tentation d'attribuer un tel processus à une fantomatique action à distance.

Il vaut la peine de souligner une fois encore que l'analyse théorique présentée ci-dessus est basée sur une interprétation spécifique de la mécanique quantique. Des interprétations qui n'invoquent pas la réduction de l'état du système par l'acte d'observation ont été proposées.¹⁴

12. Les états des détecteurs D_1 et D_2 sont maintenant inclus, mais l'état du détecteur D_3 , qui a déjà joué son rôle, est omis.

13. Évidemment, cet argument suppose un détecteur idéal, à la vigilance duquel aucun photon n'échappe.

14. Voir le matériel intitulé *Informations Complémentaires* pour un bref survol des principales interprétations alternatives.