

Dualidade onda-partícula - O interferômetro de Mach-Zehnder

M. Betz, I. de Lima e G. Mussatto

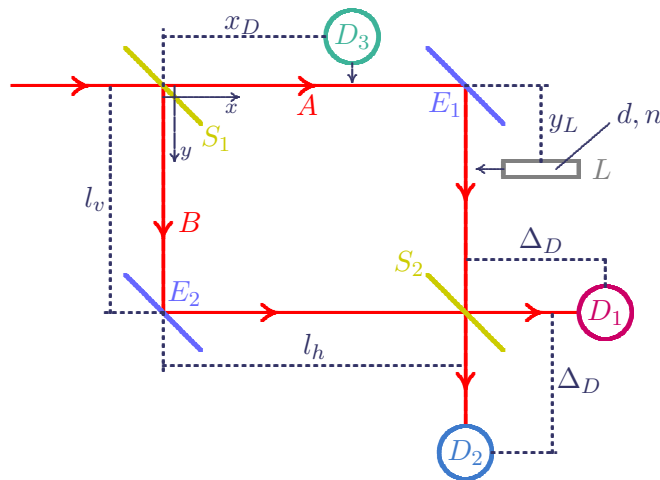
Formalismo

Nesta parte do material, apresentamos em alguns detalhes a descrição matemática dos fenômenos observados no interferômetro. A teoria subjacente, conhecida como mecânica ondulatória ou mecânica quântica, faz uso de um formalismo um tanto abstrato. Porém, um leitor que tiver familiaridade com números complexos e funções elementares (exponencial e trigonométricas) deverá ser capaz de acompanhar o desenvolvimento. Um leitor que não possuir tais conhecimentos, ou não de-seja aprofundar os pormenores aqui esmiuçados, poderá assim mesmo compreender os aspectos conceituais essenciais, apenas através da execução das animações e da leitura dos textos curtos que as comentam.

I. Especificação do dispositivo experimental

Utilizamos as convenções indicadas na figura abaixo para referenciar as várias partes do interferômetro. Este é constituído de dois espelhos semi-refletores S_1 e S_2 e de dois espelhos totalmente refletores E_1 e E_2 . Na saída do aparato estão colocados dois detectores D_1 e D_2 . Opcionalmente, pode-se colocar num dos caminhos do feixe um terceiro detector D_3 e/ou uma lâmina transparente L .

O sistema de eixos de coordenadas tem a sua origem no centro do espelho S_1 , com o eixo vertical¹ orientado para baixo.



Usamos também as seguintes notações:

- l_h para o comprimento dos braços horizontais do aparato, ou seja para as distâncias entre S_1 e E_1 e entre E_2 e S_2 . Estas distâncias devem ser iguais.
- l_v para o comprimento dos braços verticais do aparato, ou seja para as distâncias entre S_1 e E_2 e entre E_1 e S_2 . Estas distâncias também devem ser iguais, mas l_v não precisa ser igual a l_h .
- d para a espessura da lâmina transparente, e n para o índice de refração do material que a constitui.

¹Usamos aqui os termos “horizontal” e “vertical” em referência à figura. No laboratório, os quatro braços estão usualmente no mesmo plano horizontal.

- y_L para a posição vertical da lâmina transparente.
- Δ_D para a distância entre o espelho S_2 e os detectores D_1 e D_2 . Supomos que esta distância é a mesma para ambos detectores.
- x_D para a distância entre o espelho S_1 e o detector D_3 , quando este estiver em uso.

Supomos que os espelhos semi-refletores são simétricos e não absorvem a luz. Neste caso, mostra-se² que a componente de luz refletida sofre um deslocamento de fase de $\pi/2$ ou $\lambda/4$, sendo λ o comprimento de onda. No caso de um espelho totalmente refletor, o deslocamento de fase depende do tipo de espelho. Porém, como no interferômetro de Mach-Zehnder cada componente do feixe sofre necessariamente uma (e apenas uma) tal reflexão, basta que os dois espelhos sejam do mesmo tipo para que se torne irrelevante o deslocamento de fase por eles introduzido. Para simplificar, vamos supor que cada espelho totalmente refletor também introduz um deslocamento de fase igual a $\pi/2$.

II. Fluxo contínuo - Ondas planas

A. Especificação e interpretação da onda

Estudaremos primeiramente a propagação no interferômetro de uma onda plana, ou seja, uma onda de frequência f e comprimento de onda λ bem definidos. Na mecânica quântica, tal onda corresponde a um “estado estacionário”, um fluxo ininterrupto de partículas que não são observadas individualmente. Na perspectiva da teoria ondulatória clássica, tal onda descreve um fluxo de radiação de intensidade constante.

Na mecânica quântica, a função de onda é uma função complexa. Para uma frequência f bem definida, ela possui a forma³

$$\Psi(x, y, t) = \psi(x, y) e^{-i\omega t}, \quad (1)$$

onde

$$\omega = 2\pi f. \quad (2)$$

Para uma onda plana propagando-se na direção x , como é o caso antes da entrada do feixe no aparato, tem-se

$$\psi(x, y) \equiv \psi_0 = e^{ikx}, \quad (3)$$

com

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (4)$$

A teoria quântica interpreta a norma quadrada $|\Psi|^2$ da função de onda como uma medida da intensidade do fluxo de partículas do feixe. Com (1) e (3), a intensidade inicial é⁴

$$I_0 = |\psi_0|^2 = 1. \quad (5)$$

²Veja o material de apoio intitulado *Informações Complementares*.

³No interferômetro, a propagação ocorre na direção x ou na direção y , dependendo do trecho de caminho considerado. Portanto, precisamos formular uma descrição bidimensional. A terceira dimensão, perpendicular ao plano do aparato, pode ser ignorada.

⁴Assim, obteremos as intensidades como frações (ou porcentagens, após multiplicação por 100) da intensidade inicial. Vale notar neste ponto que a descrição clássica, na qual a função de onda é real, poderá ser obtida tomando-se a parte real (ou a parte imaginária) de todas as expressões desenvolvidas aqui. Aliás, tal artifício é frequentemente utilizado por razões de conveniência. As intensidades deduzidas poderão ser interpretadas como frações do fluxo inicial médio (sobre um período) de energia.

B. Igual propagação pelos dois braços

Após passar pelo espelho semi-refletor S_1 , a onda está dividida em duas componentes ψ_A e ψ_B , de igual intensidade ($1/2$). Cada componente tem portanto módulo igual a $1/\sqrt{2}$.

A componente ψ_A foi transmitida por S_1 , o que não ocasionou nenhum deslocamento de fase. Portanto, entre S_1 e E_1 ,

$$\psi_A(S_1 \rightarrow E_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{ikx} . \quad (6)$$

Esta componente é então refletida por E_1 , o que ocasiona uma defasagem por $\pi/2$, além de mudar por 90° a direção de propagação. Portanto, após esta reflexão

$$\psi_A(E_1 \rightarrow S_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(kl_h + \frac{\pi}{2} + ky)} , \quad (7)$$

onde l_h refere-se à distância horizontal percorrida pelo feixe no caminho A (igual obviamente à distância entre S_1 e E_1). Ao chegar em S_2 , ψ_A é dividida numa componente transmitida $\psi_A(D_2)$ que ruma para o detector D_2 , e uma componente refletida $\psi_A(D_1)$ que ruma para o detector D_1 . Esta componente sofre uma segunda defasagem por $\pi/2$ ao ser refletida. Cada uma destas componentes tem módulo igual ao módulo de ψ_A dividido por $\sqrt{2}$, portanto igual a $1/2$. Assim temos

$$\psi_A(D_1) = \frac{1}{2} e^{i(kl_h + \frac{\pi}{2} + kl_v + \frac{\pi}{2} + kx')} = \frac{1}{2} e^{i(kl_v + \pi + kx)} , \quad (8)$$

$$\psi_A(D_2) = \frac{1}{2} e^{i(kl_h + \frac{\pi}{2} + kl_v + ky')} = \frac{1}{2} e^{i(kl_h + \frac{\pi}{2} + ky)} , \quad (9)$$

onde utilizamos temporariamente um sistema de coordenadas (x', y') cuja origem coincide com S_2 , e onde l_v refere-se à distância vertical percorrida pelo feixe no caminho A (igual obviamente à distância entre E_1 e S_2).

A componente ψ_B foi refletida por S_1 , o que ocasionou um deslocamento de fase de $\pi/2$, além de mudar por 90° a direção de propagação. Portanto, entre S_1 e E_2 ,

$$\psi_B(S_1 \rightarrow E_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(ky + \frac{\pi}{2})} . \quad (10)$$

Esta componente é então refletida por E_2 , o que ocasiona outra defasagem por $\pi/2$, além de mudar de novo por 90° a direção de propagação. Portanto, após esta reflexão

$$\psi_B(E_2 \rightarrow S_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(kl_v + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + kx)} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(kl_v + \pi + kx)} , \quad (11)$$

onde usamos o fato que a distância vertical percorrida pelo feixe no caminho B (igual obviamente à distância entre S_1 e E_2) é também igual a l_v . Ao chegar em S_2 , ψ_B é dividida numa componente transmitida $\psi_B(D_1)$ que ruma para o detector D_1 , e uma componente refletida $\psi_B(D_2)$ que ruma para o detector D_2 . Esta componente sofre um terceiro deslocamento por $\pi/2$ ao ser refletida. Cada uma destas componentes tem módulo igual ao módulo de ψ_B dividido por $\sqrt{2}$, portanto igual a $1/2$. Assim temos⁵

$$\psi_B(D_1) = \frac{1}{2} e^{i(kl_v + \pi + kl_h + kx')} = \frac{1}{2} e^{i(kl_v + \pi + kx)} , \quad (12)$$

$$\psi_B(D_2) = \frac{1}{2} e^{i(kl_v + \pi + kl_h + \frac{\pi}{2} + ky')} = \frac{1}{2} e^{i(kl_h + \frac{3\pi}{2} + ky)} . \quad (13)$$

⁵Aqui usamos o fato que a distância entre E_2 e S_2 é l_h .

Combinando (8) e (12), obtemos a onda total que chega em D_1 :

$$\psi(D_1) = \psi_A(D_1) + \psi_B(D_1) = \frac{1}{2} e^{i(kl_v + \pi + kx)} + \frac{1}{2} e^{i(kl_v + \pi + kx)} = e^{i(kl_v + \pi + kx)}. \quad (14)$$

Semelhantemente, combinando (9) e (13), obtemos a onda total que chega em D_2 :

$$\begin{aligned} \psi(D_2) = \psi_A(D_2) + \psi_B(D_2) &= \frac{1}{2} e^{i(kl_h + \frac{\pi}{2} + ky)} + \frac{1}{2} e^{i(kl_h + \frac{3\pi}{2} + ky)} \\ &= \frac{1}{2} e^{i(kl_h + \frac{\pi}{2} + ky)} (1 + e^{i\pi}) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Assim, a onda que chega em D_1 tem amplitude (e portanto intensidade) igual à da onda incidente, e nada chega em D_2 . Vale notar que este resultado é muito facilmente entendido. As ondas que chegam em D_1 pelos caminhos A e B sofrem ambas uma reflexão por um espelho semi-refletor. Portanto, elas chegam com a mesma fase e interferem construtivamente. Para as ondas que chegam em D_2 , aquela que caminha por A não sofre nenhuma reflexão por um espelho semi-refletor. Já aquela que caminha por B sofre reflexão por ambos espelhos semi-refletores e portanto tem a sua fase deslocada de meio comprimento de onda em relação à primeira. A interferência é completamente destrutiva. Como já mencionamos, os espelhos totalmente refletores podem ser ignorados neste argumento.

C. Lâmina transparente num dos braços

Consideramos agora o que acontece quando uma lâmina transparente L de espessura d , fabricada num material de índice de refração n , é colocada no percurso A , por exemplo no caminho entre E_1 e S_2 .

É sabido que num meio material de índice de refração n , a velocidade da luz é c/n , sendo c a velocidade da luz no vácuo.⁶ Portanto, já que a frequência da onda não é afetada pelo material, este ocasiona uma modificação do comprimento de onda de λ para λ' dado por

$$\lambda' = \frac{c}{nf} = \frac{\lambda}{n}. \quad (16)$$

Correspondentemente, o número de onda muda de k para

$$k' = \frac{2\pi}{\lambda'} = nk. \quad (17)$$

Portanto, a presença do material ocasiona um deslocamento de fase na componente ψ_A , dado por

$$\phi = (k' - k)d = (n - 1)kd. \quad (18)$$

Já que um deslocamento de fase de 2π corresponde a um comprimento de onda, podemos interpretar este resultado como um deslocamento ou atraso espacial das frentes de onda por

$$\varphi = (n - 1)d. \quad (19)$$

Assim, com a introdução da lâmina, a expressão (7) fica modificada da seguinte maneira:

$$\psi_A(E_1 \rightarrow S_2) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(kl_h + \frac{\pi}{2} + ky)} & \text{para } y < y_L \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(kl_h + \frac{\pi}{2} + \phi + ky)} & \text{para } y > y_L, \end{cases} \quad (20)$$

⁶A velocidade da luz no ar é praticamente igual a c .

sendo y_L a posição vertical da lâmina. As modificações correspondentes das expressões (8) e (9) são

$$\psi_A(D_1) = \frac{1}{2} e^{i(kl_v + \pi + \phi + kx)}, \quad (21)$$

$$\psi_A(D_2) = \frac{1}{2} e^{i(kl_h + \frac{\pi}{2} + \phi + ky)}. \quad (22)$$

Seguem as modificações nas expressões (14) e (15):

$$\begin{aligned} \psi(D_1) = \psi_A(D_1) + \psi_B(D_1) &= \frac{1}{2} e^{i(kl_v + \pi + \phi + kx)} + \frac{1}{2} e^{i(kl_v + \pi + kx)} \\ &= e^{i(kl_v + \pi + \frac{\phi}{2} + kx)} \cos \frac{\phi}{2}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \psi(D_2) = \psi_A(D_2) + \psi_B(D_2) &= \frac{1}{2} e^{i(kl_h + \frac{\pi}{2} + \phi + ky)} + \frac{1}{2} e^{i(kl_h + \frac{3\pi}{2} + ky)} \\ &= e^{i(kl_h + \frac{\pi}{2} + \frac{\phi}{2} + ky)} i \sin \frac{\phi}{2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Assim, para uma intensidade unitária do feixe incidente, as intensidades observadas nos dois detectores são

$$I(D_1) = \cos^2 \frac{\phi}{2}, \quad (25)$$

$$I(D_2) = \sin^2 \frac{\phi}{2}. \quad (26)$$

Modificando a espessura d da lâmina e/ou o índice de refração n , pode-se modificar a vontade estas intensidades relativas. Na visualização, a espessura da lâmina pode ser variada entre 0 e 2λ , e o índice de refração entre 1 e 2. Estes intervalos são suficientes para que seja possível obter quaisquer porcentagens para as intensidades relativas medidas.

III. Estados monofotônicos - Pacotes de onda

A. Pacote de onda de um fóton

Como sabemos, apesar de ser uma teoria ondulatória, a mecânica quântica deve ser interpretada em termos de corpúsculos, pois os eventos individuais que observamos - cliques em detectores ou impactos sobre uma tela - estão localizados no espaço e no tempo. A relação entre o formalismo ondulatório e os dados experimentais é de natureza estatística. Especificamente, no caso do interferômetro, os corpúsculos são fótons. É possível configurar o aparato de maneira a observar os impactos dos fótons sobre uma tela. O aspecto ondulatório manifesta-se na figura formada ao acumular muitos impactos. Outro procedimento, que utilizaremos aqui, consiste simplesmente em utilizar como detectores, contadores de fótons. Como vamos ver, o aspecto ondulatório manifesta-se então nos números de fótons contados.

Para analisar em detalhes a propagação e a detecção de fótons, precisamos descrever matematicamente o estado de um fóton. Para tanto, utilizamos um *pacote de onda*,⁷ que vem a ser uma superposição de muitas ondas planas, com diferentes valores do número de onda k . A matemática demonstra que se quisermos formar um pacote de onda localizado numa região de tamanho Δx ,

⁷A associação de um pacote de onda a um fóton é sujeita a certas limitações. Veja o material de apoio intitulado *Informações Complementares* para referências.

precisamos sobrepor ondas planas cujos números de onda diferam no mínimo por valores de ordem⁸ Δk , tal que

$$\Delta k \simeq \frac{1}{\Delta x} . \quad (27)$$

A mecânica quântica estabelece vínculos entre as grandezas físicas associadas à onda e aquelas associadas à partícula. Em especial, postula a seguinte relação entre o momentum p da partícula e o comprimento de onda λ da onda:

$$p = \frac{h}{\lambda} , \quad (28)$$

onde h é a famosa *constante de Planck*, a nova constante fundamental que permeia a física quântica. Usando (4), esta relação pode ser reescrita na forma

$$p = \hbar k , \quad (29)$$

com $\hbar = h/2\pi$. Assim, a condição matemática (27) leva à condição física

$$\Delta p \Delta x \simeq \hbar , \quad (30)$$

onde Δp é a dispersão ou indeterminação no valor do momentum. Lembramos que trata-se dos valores mínimos das dispersões. Esta condição é conhecida como *relação de indeterminação (ou de incerteza) de Heisenberg*.

Para que o pacote descreva um fóton de momentum aproximadamente definido, devemos ter

$$\Delta p \ll \bar{p} \text{ ou } \Delta k \ll \bar{k} , \quad (31)$$

onde \bar{p} é o momentum médio e \bar{k} o número de onda médio. Da relação (4), pode-se tirar facilmente

$$\frac{\Delta \lambda}{\bar{\lambda}} = \frac{\Delta k}{\bar{k}} , \quad (32)$$

onde $\bar{\lambda}$ é o comprimento de onda médio. De (27) e (31) segue

$$\Delta x \gg \frac{1}{\bar{k}} , \quad (33)$$

ou equivalentemente, usando (4) de novo,

$$\Delta x \gg \bar{\lambda} . \quad (34)$$

Ou seja, o tamanho do pacote deve ser muito maior que o comprimento de onda médio.

A conclusão que acabamos de tirar traz algumas implicações para a visualização na tela do estado monofotônico. Associando-se ao fóton um pacote visível mas não muito extenso, o comprimento de onda torna-se demasiadamente pequeno para ser mostrado na tela. Se, como fizemos acima, introduzimos no caminho do feixe uma lâmina de espessura máxima igual a dois comprimentos de onda, também fica impossível enxergar esta espessura na escala da tela. Por esta razão, uma lupa é fornecida ao usuário na animação.

Com a suposição (31), o deslocamento de fase introduzido pela lâmina é aproximadamente o mesmo para todas as ondas que compoem o pacote e é dado, em termos do número de onda médio, por uma expressão análogo a (18):

$$\phi = (n - 1) \bar{k} d . \quad (35)$$

⁸As igualdades denotadas pelo símbolo \simeq , assim como as desigualdes denotadas por \ll e \gg , relacionam *ordens de grandeza*. Fatores “de ordem um”, tais como 2 ou π , são ignorados.

O atraso espacial de todas as frentes de onda, e portanto do pacote, é dado por (19). Sendo da mesma ordem de grandeza que a espessura da lâmina, é também invisível na escala da tela.

Para descrever a propagação do fóton no plano do interferômetro, precisamos construir um pacote bidimensional, cuja forma geral é

$$\Psi(x, y, t) = \int \frac{dk_1 dk_2}{2\pi} g(k_1, k_2) e^{i[k_1 x + k_2 y - \omega(k_1, k_2)t]}, \quad (36)$$

onde

$$\omega(k_1, k_2) = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} c. \quad (37)$$

A relação (37) garante que o pacote propaga-se com a velocidade c . O movimento desejado para o fóton determina as características da função $g(k_1, k_2)$. Por exemplo, para que o pacote descreva um fóton propagando-se na direção x com momentum médio $\bar{p} = \hbar \bar{k}$, $g(k_1, k_2)$ deve ser uma função centrada em $k_1 = \bar{k}$ e $k_2 = 0$, com dispersões $\Delta k_1 \ll \bar{k}$ e $\Delta k_2 \ll \bar{k}$. Escrevendo $k_1 = \bar{k} + k'_1$, podemos então aproximar (37) por

$$\omega(k_1, k_2) = \sqrt{(\bar{k} + k'_1)^2 + k_2^2} c \simeq \bar{k} \sqrt{1 + 2 \frac{k'_1}{\bar{k}}} c \simeq \bar{k} \left(1 + \frac{k'_1}{\bar{k}}\right) c = (\bar{k} + k'_1) c, \quad (38)$$

onde termos de segunda ordem em $\Delta k_1/\bar{k}$ e $\Delta k_2/\bar{k}$ foram desprezados. Com isto, a expressão (36) fica

$$\Psi(x, y, t) = e^{i\bar{k}(x-ct)} \int \frac{dk'_1 dk_2}{2\pi} \bar{g}(k'_1, k_2) e^{i[(k'_1(x-ct) + k_2 y)]} = e^{i\bar{k}(x-ct)} \Phi(x - ct, y), \quad (39)$$

onde definimos

$$\bar{g}(k'_1, k_2) = g(\bar{k} + k'_1, k_2), \quad (40)$$

e

$$\Phi(x, y) = \int \frac{dk'_1 dk_2}{2\pi} \bar{g}(k'_1, k_2) e^{i(k'_1 x + k_2 y)}. \quad (41)$$

Como a função $\bar{g}(k'_1, k_2)$ é centrada em $k'_1 = k_2 = 0$, a função Φ é centrada em $x = y = 0$. Para permitir a interpretação probabilística da teoria, esta função deve ser normalizada:

$$\int |\Phi(x, y)|^2 dx dy = 1. \quad (42)$$

A função de onda (39) corresponde a um pacote cujo centro se propaga com velocidade positiva na direção x sobre a linha $y = 0$, passando por $x = 0$ em $t = 0$. Para simplificar os desenvolvimentos a seguir, utilizaremos para este pacote a notação compacta:⁹

$$|ct, 0\rangle \equiv e^{i\bar{k}(x-ct)} \Phi(x - ct, y). \quad (43)$$

É fácil generalizar isto para o caso de um pacote cujo centro propaga-se com velocidade positiva sobre a linha $y = y_0$ e passa por $x = x_0$ em $t = 0$:

$$|ct + x_0, y_0\rangle \equiv e^{i\bar{k}(x-x_0-ct)} \Phi(x - x_0 - ct, y - y_0). \quad (44)$$

Analogamente, um pacote cujo centro propaga-se com velocidade positiva na direção y sobre a linha $x = x_0$ e passa por $y = y_0$ em $t = 0$ pode ser escrito

$$|x_0, ct + y_0\rangle \equiv e^{i\bar{k}(y-y_0-ct)} \Phi(x - x_0, y - y_0 - ct). \quad (45)$$

⁹Esta notação é inspirada por aquela introduzida por P. A. M. Dirac para sistematizar o formalismo da mecânica quântica. Porém, ela está utilizada aqui apenas de maneira informal.

B. Inclusão dos detectores

Para poder discutir o processo de medição na mecânica quântica, é necessário incluir na descrição os detectores, que são contadores de fótons. Denotamos por χ_1 e χ_2 os estados dos contadores D_1 e D_2 . Supomos que os contadores encontram-se inicialmente no estado $\chi(0)$ e que a passagem do fóton por um contador produz a transição $\chi(0) \rightarrow \chi(1)$ no estado do mesmo. Supomos que, após registro (aumento por uma unidade do número de fótons indicado pelo contador), um contador volta ao estado $\chi(0)$, à espera do próximo fóton.

C. Propagação do pacote pelo aparato

Com argumentos idênticos àqueles utilizados para a onda plana, podemos agora escrever a expressão da função de onda associada ao fóton e aos contadores nas várias partes do interferômetro. Para podermos especificar a ordem temporal das reflexões pelos espelhos, vamos supor que $l_h > l_v$. Por conveniência, utilizaremos a relação

$$e^{i\pi/2} = i, \quad (46)$$

para escrever a fase adicional introduzida por cada reflexão. Como o sistema de dois detectores permanece no estado $\chi_1(0)\chi_2(0)$ até a última fase do processo (a contagem), ele será omitido na descrição das fases anteriores.

Supomos que o pacote de onda alcança o espelho S_1 em $t = 0$. Antes disto, o estado do fóton é

$$\Psi = |ct, 0\rangle \text{ para } t < 0. \quad (47)$$

Após passagem pelo espelho S_1 , e antes que o espelho E_2 seja alcançado, o estado é

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} |ct, 0\rangle + i \frac{1}{\sqrt{2}} |0, ct\rangle \text{ para } 0 < ct < l_v. \quad (48)$$

Após reflexão pelo espelho E_2 , mas antes da reflexão pelo espelho E_1 , o estado é (usando $i^2 = -1$)

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} |ct, 0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |ct - l_v, l_v\rangle \text{ para } l_v < ct < l_h. \quad (49)$$

Após reflexão pelo espelho E_1 , mas antes de alcançar a lâmina L , o estado é

$$\Psi = i \frac{1}{\sqrt{2}} |l_h, ct - l_h\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |ct - l_v, l_v\rangle \text{ para } l_h < ct < l_h + y_L. \quad (50)$$

Com as suposições já discutidas, a lâmina L apenas produz um deslocamento de fase ϕ da componente que por ela passa. Portanto, após passagem desta componente pela lâmina, o estado é

$$\Psi = i \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} |l_h, ct - l_h\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |ct - l_v, l_v\rangle \text{ para } l_h + y_L < ct < l_h + l_v. \quad (51)$$

Estamos nos aproximando do instante da detecção portanto, a partir deste ponto, incluiremos os detectores na descrição do estado. Após passagem pelo espelho semi-refletor S_2 mas antes da detecção, o estado total do sistema é

$$\begin{aligned} \Psi_{tot} = & \left\{ i \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} |l_h, ct - l_h\rangle + i \frac{1}{\sqrt{2}} |ct - l_v, l_v\rangle \right] \right. \\ & \left. - \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} |ct - l_v, l_v\rangle + i \frac{1}{\sqrt{2}} |l_h, ct - l_h\rangle \right] \right\} \\ & \times \chi_1(0)\chi_2(0) \text{ para } l_h + l_v < ct < l_h + l_v + \Delta_D, \end{aligned} \quad (52)$$

onde denotamos por Δ_D a distância entre o espelho S_2 e os detectores, que supomos ser a mesma para ambos detectores. Reagrupando termos, podemos simplificar (52):

$$\begin{aligned} \Psi_{tot} = & -e^{i\phi/2} \left[\text{sen} \frac{\phi}{2} |l_h, ct - l_h\rangle + \cos \frac{\phi}{2} |ct - l_v, l_v\rangle \right] \\ & \times \chi_1(0)\chi_2(0) \text{ para } l_h + l_v < ct < l_h + l_v + \Delta_D . \end{aligned} \quad (53)$$

A detecção, que ocorre no instante $t = (l_h + l_v + \Delta_D)/c$, transforma este estado em

$$\Psi_{tot} = -e^{i\phi/2} \left[\text{sen} \frac{\phi}{2} |l_h, ct - l_h\rangle \times \chi_1(0)\chi_2(1) + \cos \frac{\phi}{2} |ct - l_v, l_v\rangle \times \chi_1(1)\chi_2(0) \right] . \quad (54)$$

D. Interpretação da medida e colapso do pacote

Até este ponto, a evolução do estado do sistema, incluindo os contadores, deu-se sem intervenção de um observador, que observaria o disparo de um dos detectores, ou de um computador que registraria o aumento por uma unidade do número de fótons até aqui contados por um dos contadores. Tal intervenção é necessária para que se possa falar do resultado do experimento. Se o contador D_1 contou um fóton a mais, isto significa que ele passou para o estado $\chi_1(1)$. De acordo com a interpretação usual da mecânica quântica, a probabilidade de isto ocorrer é dada pelo módulo quadrado do coeficiente do termo correspondente (o segundo termo) da expressão (54) acima, ou seja

$$P(D_1) = | - e^{i\phi/2} \cos \frac{\phi}{2} |^2 = \cos^2 \frac{\phi}{2} . \quad (55)$$

Semelhantemente, se o contador D_2 registrou o fóton, ele passou para o estado $\chi_2(1)$. A probabilidade associada é deduzida do coeficiente do primeiro termo do estado total (54):

$$P(D_2) = | - e^{i\phi/2} \text{sen} \frac{\phi}{2} |^2 = \text{sen}^2 \frac{\phi}{2} . \quad (56)$$

Vê-se que as expressões das probabilidades (55) e (56) são idênticas às das intensidades (25)-(26). O cálculo teórico destas probabilidades é o que o formalismo da mecânica quântica faculta. Não é possível prever o resultado de uma única medida. Para verificar experimentalmente a teoria, é necessário repetir a medida muitas vezes. Se mandarmos um grande número de fótons através do aparato e os contadores D_1 e D_2 contarem N_1 e N_2 fótons respectivamente, então as razões $N_1/(N_1 + N_2)$ e $N_2/(N_1 + N_2)$ deverão aproximar-se dos valores teóricos das probabilidades $P(D_1)$ e $P(D_2)$.

Após detecção pelo contador D_1 , o estado do fóton será dado pela parte do segundo termo da expressão (54) que diz respeito ao fóton, ou seja, pelo pacote de onda

$$\Psi_1 = |ct - l_v, l_v\rangle \text{ para } ct > l_h + l_v + \Delta_D . \quad (57)$$

Já se foi o contador D_2 que registrou a passagem do fóton, o estado subsequente deste é facilmente extraído do primeiro termo de (54):

$$\Psi_2 = |l_h, ct - l_h\rangle \text{ para } ct > l_h + l_v + \Delta_D . \quad (58)$$

Vale notar que os coeficientes (funções da defasagem ϕ) presentes em (54) foram omitidos em (57) e (58). A razão é que estes estados devem ser *normalizados*, ou seja, devem fornecer uma probabilidade total unitária. Se o contador D_1 disparou, o fóton deve necessariamente ser observado nele; idem para o contador D_2 . As fases globais dos estados são inobserváveis e foram escolhidas iguais a 1 em (57) e (58). A redução do estado do fóton descrito por (54) ao estado (57) ou ao estado (58),

dependendo do resultado da medida, é o famigerado *colapso do pacote de onda*. Embora tenhamos explicitado este colapso na visualização, deve-se admitir que a sua conceituação é bastante problemática. Tratar-se-á de um fenômeno físico real, ou apenas de um passo num argumento lógico? Voltamos a esta questão na próxima seção.

E. Por onde o fóton passou?

O desenvolvimento acima baseou-se na superposição linear dos componentes do pacote de onda que descrevem o percurso do fóton ao longo dos dois caminhos alternativos A e B . Pode-se perguntar o que ocorre se tentarmos determinar por qual dos dois caminhos um determinado fóton realmente passou. Para tanto, introduzimos o detector D_3 no caminho A , no lugar indicado na figura. Vamos supor que $x_D < l_h$, mas o leitor poderá convencer-se de que as conclusões alcançadas independem da posição de D_3 ao longo do caminho A . Supomos que este detector está inicialmente no estado $\chi_3(0)$ e muda para o estado $\chi_3(1)$ ao registrar a passagem do fóton.

Até que o pacote alcance o detector D_3 , nada de novo ocorre e podemos usar (48) para descrever o estado do fóton, apenas acrescentando o estado do detector:¹⁰

$$\Psi = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} |ct, 0\rangle + i \frac{1}{\sqrt{2}} |0, ct\rangle \right] \times \chi_3(0) \quad \text{para } 0 < ct < x_D. \quad (59)$$

Apenas o primeiro termo nesta expressão corresponde à propagação do pacote pelo caminho A , portanto apenas para este termo haverá mudança no estado do detector D_3 . Logo, em $t = x_D/c$, o estado passará a ser

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} |ct, 0\rangle \times \chi_3(1) + i \frac{1}{\sqrt{2}} |0, ct\rangle \times \chi_3(0). \quad (60)$$

Conforme a interpretação já introduzida daquilo que ocorre quando um contador de fato registra - ou não - a passagem do fóton, podemos deduzir da expressão acima que a probabilidade de o contador D_3 disparar é $1/2$ e que, se isto ocorre, o estado do fóton passa a ser

$$\Psi_A = |ct, 0\rangle. \quad (61)$$

A probabilidade de o contador não disparar também é $1/2$ e, neste caso, o estado do fóton “colapsa” para¹¹

$$\Psi_B = i|0, ct\rangle, \quad (62)$$

que corresponde a um pacote propagando-se exclusivamente pelo caminho B .

A partir daí, já que o fóton está ou no estado (61), ou no estado (62), mas não mais numa superposição destes dois estados, deve-se acompanhar separadamente a evolução de cada estado pelo resto do aparato. Os resultados para $(l_h + l_v)/c < t < (l_h + l_v + \Delta_D)/c$, ou seja logo antes da detecção por D_1 ou D_2 podem ser facilmente extraídos da expressão (52):¹²

$$\Psi_A = i e^{i\phi} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} |l_h, ct - l_h\rangle + i \frac{1}{\sqrt{2}} |ct - l_v, l_v\rangle \right] \times \chi_1(0) \chi_2(0), \quad (63)$$

$$\Psi_B = - \left[\frac{1}{\sqrt{2}} |ct - l_v, l_v\rangle + i \frac{1}{\sqrt{2}} |l_h, ct - l_h\rangle \right] \times \chi_1(0) \chi_2(0). \quad (64)$$

Em $t = (l_h + l_v + \Delta_D)/c$, os detectores são alcançados e estes estados mudam para

$$\Psi_A = i e^{i\phi} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} |l_h, ct - l_h\rangle \times \chi_1(0) \chi_2(1) + i \frac{1}{\sqrt{2}} |ct - l_v, l_v\rangle \times \chi_1(1) \chi_2(0) \right], \quad (65)$$

$$\Psi_B = - \left[\frac{1}{\sqrt{2}} |ct - l_v, l_v\rangle \times \chi_1(1) \chi_2(0) + i \frac{1}{\sqrt{2}} |l_h, ct - l_h\rangle \times \chi_1(0) \chi_2(1) \right]. \quad (66)$$

¹⁰Os detectores D_1 e D_2 não precisam ser considerados nesta parte do argumento.

¹¹O fator i em (62) introduz apenas uma fase global inobservável e poderia ser abandonado.

¹²Incluimos agora os detectores D_1 e D_2 , e omitimos o detector D_3 , que já cumpriu o seu papel.

Vê-se que a lâmina transparente introduzida no caminho A apenas modifica a fase global do pacote e não levará a nenhum efeito observável. Nos dois casos - A ou B - a probabilidade de disparar será $1/2$ tanto para D_1 quanto para D_2 . Pode-se dizer que o ato de determinar qual o caminho seguido pelo fóton destruiu a interferência entre os dois caminhos. Como antes, caso D_1 disparar, o estado do fóton após a contagem será descrito por (57); caso D_2 disparar, o estado será dado por (58).

É interessante contrastar o efeito, sobre o estado do fóton, dos dois dispositivos que temos introduzido num dos braços do aparato: a lâmina e o detector. A lâmina introduz uma defasagem da componente do pacote que a atravessa, sem afetar a coerência entre as duas componentes. Já o detector “apaga” uma das componentes. Porque esta diferença? Porque a lâmina é apenas um elemento adicional acrescentado ao sistema, e não um dispositivo que forneça informação a respeito deste. Já o detector registra uma informação adicional. A modificação do estado do sistema - o colapso - corresponde à incorporação na descrição desta nova informação. É particularmente notável que, se nada acontecer no detector (nenhum clique ou outro sinal), o mero fato de ele estar presente nós permite concluir que o fóton não passou pelo braço A , e portanto passou pelo braço B , o que provoca o colapso do pacote neste braço.¹³ Ou ainda, a não ocorrência de um possível evento num certo lugar afeta o estado do sistema num outro lugar. Claramente, devemos evitar a tentação de atribuir este processo a uma misteriosa “ação a distância”.

Enfatizamos que a análise teórica aqui apresentada baseia-se numa interpretação específica da mecânica quântica. Interpretações que dispensam o colapso do estado do sistema no ato de observação têm sido propostas.¹⁴

¹³Evidentemente, esta argumentação considera um detector ideal, à vigilância do qual nenhum fóton escapa.

¹⁴Veja o complemento intitulado *Informações Complementares* para uma breve revisão das principais interpretações.